

Глава 2. Тема 4. Занятие 1.

Вычисление площадей поверхностей

1°. Случай явного задания поверхности.

Площадь гладкой поверхности $z = z(x, y)$ выражается интегралом:

$$S = \iint_{\mathcal{L}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy ,$$

где $\mathcal{L}$ — проекция данной поверхности на плоскость Oxy .

2°. Случай параметрического задания поверхности.

Если уравнение поверхности задано параметрически

$$x = x(u, v) , \quad y = y(u, v) , \quad z = z(u, v) ,$$

где $(u, v) \in \mathcal{L}$ — ограниченной замкнутой области, а функции x, y, z непрерывно дифференцируемы в области $\mathcal{L}$, то для площади поверхности имеем формулу

$$S = \iint_{\mathcal{L}} \sqrt{EG - F^2} du dv ,$$

$$\text{где} \quad E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 ,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 ,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} .$$

Класс № 4041, 4044, 4048

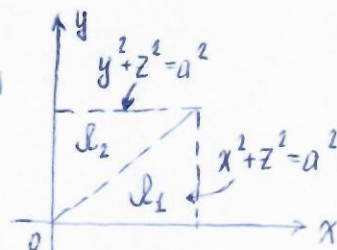
Дата № 4037, 4042, 4045

№ 4037 Найдите площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2.$$

$$S = 8 \iint_{\mathcal{L}_1} \sqrt{1 + (z'_x)^2} dx dy + 8 \iint_{\mathcal{L}_2} \sqrt{1 + (z'_y)^2} dx dy, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

Коэффициент 8 означает по симметричности по полупространствам $\{z \geq 0\}, \{z \leq 0\}$ и затем по каждой оси.



$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$z'_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad z = \sqrt{a^2 - y^2}$$

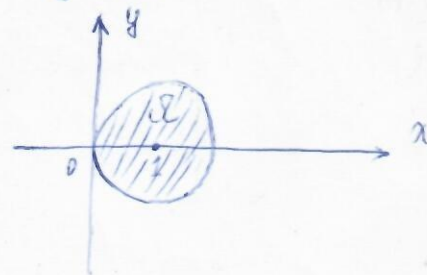
$$\begin{aligned} 8 \iint_{\mathcal{L}_1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx dy &= 8a \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8a \int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= 8a \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_0^a = 8a^2. \end{aligned}$$

$$8 \iint_{\mathcal{L}_2} \sqrt{1 + (z'_y)^2} dx dy = 8a^2 \Rightarrow S = 16a^2.$$

№ 4041 Найдите площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\mathcal{L} = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \Rightarrow$$



$$S = \iint_{\mathcal{L}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{2} \iint_{\mathcal{L}} dx dy = \sqrt{2} \pi. \Rightarrow$$

$$S = \sqrt{2} \pi.$$

N4042 Найдите площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy =$$

$$= 4 \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 - y^2} + \frac{y^2}{x^2 - y^2}} dx dy =$$

$$= 4\sqrt{2} \iint_{\Omega} \frac{x dx dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\varphi} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{r^2 \cos \varphi}{r\sqrt{\cos 2\varphi}} dr = 2\sqrt{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - 2\sin^2 \varphi} d(\sin \varphi) = |w = \sqrt{2} \sin \varphi| = 2a^2 \int_0^1 \sqrt{1 - w^2} dw =$$

$$= a^2 (w \sqrt{1 - w^2} + \arcsin w) \Big|_0^1 = a^2 \arcsin 1 = \frac{\pi a^2}{2}. \Rightarrow S = \frac{\pi a^2}{2}.$$

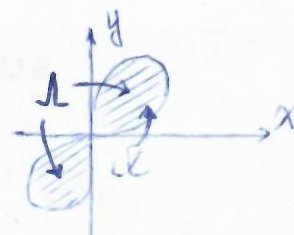
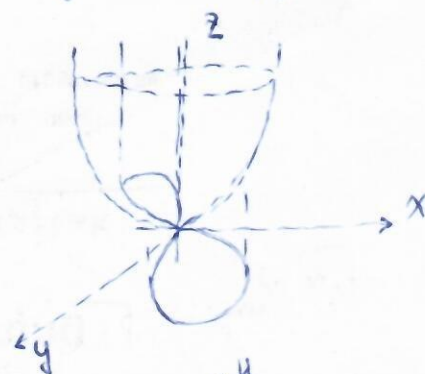
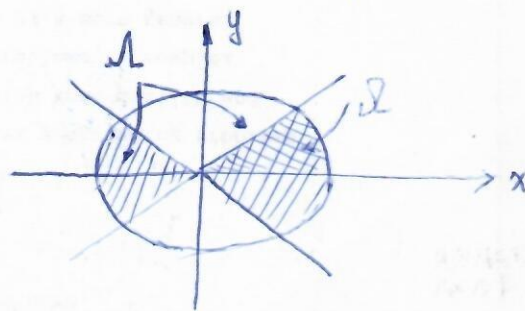
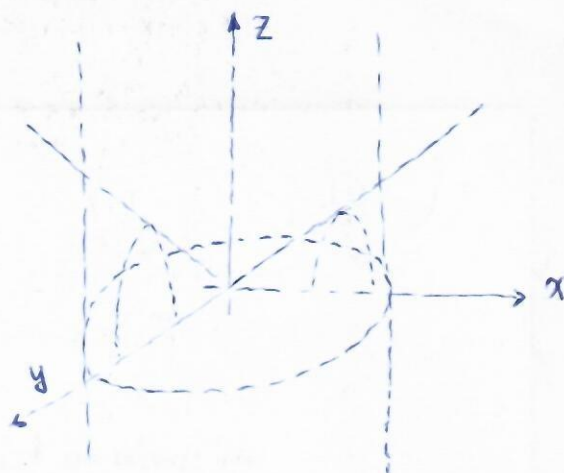
N4044 Найдите площадь части поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$

$$z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2) \Rightarrow z'_x = \frac{x}{a}, \quad z'_y = \frac{y}{a}$$

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy =$$

$$= \frac{2}{a} \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} dx dy =$$

$$= \int \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq a\sqrt{\sin 2\varphi} \end{cases} =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}}} r \sqrt{a^2 + r^2} dr = \frac{2a}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ (1 + \sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} d\varphi = \\
&= \frac{2a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi + \cos \varphi)^3 d\varphi - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{4\sqrt{2}a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi - \frac{\pi a^2}{3} = \\
&= \left| w = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right| = \frac{4\sqrt{2}a^2}{3} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - w^2) dw - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - w^2) dw - \frac{\pi a^2}{3} = \\
&= \frac{20a^2}{9} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9} (20 - 3\pi). \Rightarrow S = \frac{a^2}{9} (20 - 3\pi).
\end{aligned}$$

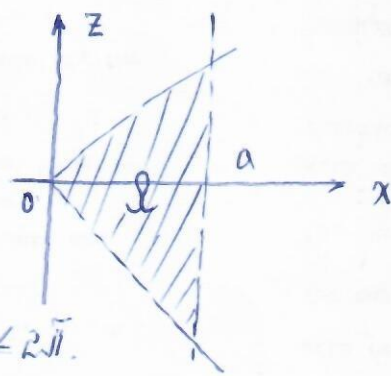
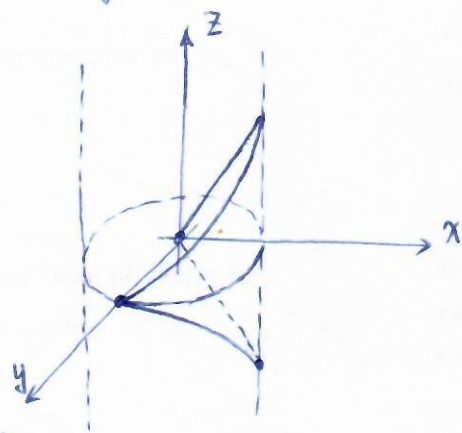
N4045. Найдите площадь части поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, ограниченной плоскостями $x + z = 0$, $x - z = 0$, $x \geq 0, y \geq 0$.

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\begin{aligned}
S &= \iint_{\Sigma} \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx dz = \\
&= 2 \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dz =
\end{aligned}$$

$$= 2a \int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -2a \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_0^a = 2a^2.$$

$$S = 2a^2.$$



N4048 Найдите площадь части цилиндра,

$x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = h\varphi$, где $0 \leq r \leq a$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sin \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= h \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$E = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$G = r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + h^2 = r^2 + h^2$$

$$F = -r \cos \varphi \sin \varphi + r \cos \varphi \sin \varphi = 0.$$

$$S = \iint_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2} dr d\varphi = \iint_{\Sigma} \sqrt{r^2 + h^2} d\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r^2 + h^2} dr =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\bar{J}|h| \int_0^a \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} dr = \left| W = \frac{r}{|h|} \right| = 2\bar{J}h^2 \int_0^{\frac{a}{|h|}} \sqrt{1+W^2} dW = \\
 &= \bar{J}h^2 \left(W \sqrt{1+W^2} + \ln(W + \sqrt{1+W^2}) \right) \Big|_0^{\frac{a}{|h|}} = \bar{J} \left\{ a \sqrt{a^2+h^2} + h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2+h^2}}{|h|} \right\} \\
 S &= \bar{J} \left(a \sqrt{a^2+h^2} + h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2+h^2}}{|h|} \right).
 \end{aligned}$$